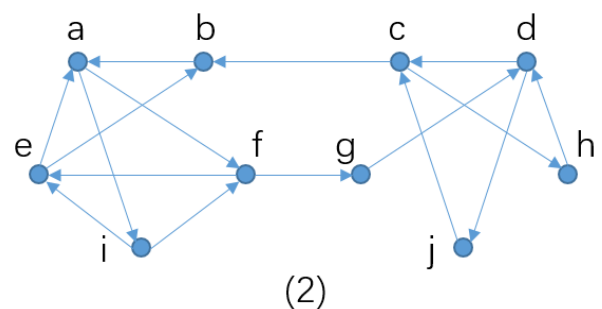
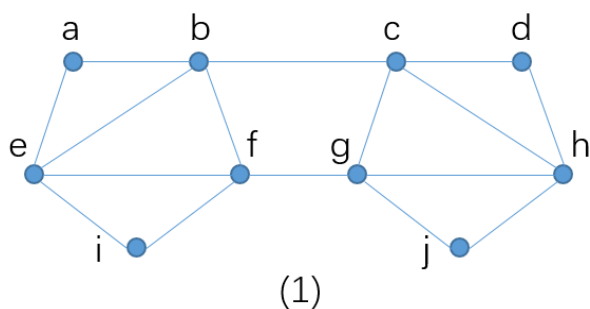


Problem Set 25: 欧拉图与哈密顿图

提交截止时间：6 月 3 日 10:00

Problem 1

试确定下方所示各图是否具有欧拉回路。若存在欧拉回路，则构造出一条欧拉回路；若不存在，试确定这个图是否具有欧拉通路。若存在欧拉通路，则构造出一条欧拉通路。（注意：有向图中如具有欧拉回路或者通路，回路或通路中的各边需要遵循相同的方向。）



Problem 2

对哪些 m 和 n 值来说，完全二部图 $K_{m,n}$ 具有

a) 欧拉回路？

b) 欧拉通路？

Problem 3

请找出所有互不同构的具有 5 个顶点的欧拉图（仅考虑无向简单图，画图示意即可）。

Problem 4

证明或反驳：若无向简单图 G_1 和 G_2 是顶点数、边数均相等的欧拉图，则 G_1 和 G_2 同构。

Problem 5

证明：具有奇数个顶点的二部图没有哈密顿回路。

Problem 6

若无向简单图 G 有欧拉通路，证明或反驳：

- a) 当 G 的顶点数是奇数时，若补图 \bar{G} 是连通的，则 \bar{G} 中存在欧拉通路；
- b) 当 G 的顶点数是偶数时，若补图 \bar{G} 是连通的，则 \bar{G} 中不存在欧拉通路。

Problem 7

给定无向简单图 G ($|G| \geq 3$)，定义线图 $L(G)$ 如下：

- 对 G 中的每条边， $L(G)$ 中恰好有一个顶点与之对应；
- $L(G)$ 中任意两点相邻当且仅当它们在 G 中对应的两条边相邻（即有一个公共顶点）。

证明若 G 是简单、连通的 r -正则图，则 $L(G)$ 是欧拉图。

Problem 8

友谊图：简单图 F 满足 $V(F) > 2$ 且对于任意 $u, v \in V(F)$, u, v 有且仅有一个共同的相邻节点（两个人只有唯一的共同的朋友），则称 F 是友谊图。

试证明：友谊图一定是欧拉图。

Problem 9

若简单图 G 满足 $V(G) \geq 3$ 且 $\delta(G) \geq \frac{V(G)-1}{2}$ ，证明或反驳：

- a) G 一定存在哈密顿回路；
- b) G 一定存在哈密顿通路。

Problem 10

G 的顶点数 n 大于 3，假设顶点 u 与 v 属于 G ， u 与 v 不相邻，且满足 $d(u) + d(v) \geq n$ 。证明： G 为哈密顿图当且仅当 $G + e$ 为哈密顿图。其中 $e = (u, v)$ 为加入的新边。

Problem 11

对哪些 m 和 n 值来说, 完全二部图 $K_{m,n}$ 具有哈密顿回路?

Problem 12

证明或反驳: 若 G 不是 2-连通图, 则 G 不是哈密顿图.

Problem 13

证明或反驳: 如果二部图 G 是 H -图, 那么必有偶数个顶点.

Problem 14

考虑在 11 天安排 11 门课程的考试 (每天考 1 门课), 使得同一位老师所任的任意两门课程考试不排在接连的两天中, 试证明如果没有老师担任多于 6 门课程, 则符合上述要求的考试安排总是可能的。

Problem 15

简单图 G 满足 $|G| > 2$, 令 m 为 G 的边数, n 为 G 的顶点数. 试证明: 如果 $m > \binom{n-1}{2} + 1$, 则 G 一定存在哈密顿回路. (提示: 可使用数学归纳法证明; 组合数 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, 可对比 Problem Set 24 Problem 8.)